Brøker – et grundkursus

I bogen for C-niveau nævner vi side 34 forskellige typer tal. Der er de naturlige tal

$$1, 2, 3, \ldots$$

som vi bruger til at tælle med. Der er de hele tal

$$\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

som består af de naturlige tal udvidet med tallet nul og de negative tal. Negative tal bruges ofte til at angive et tab eller et underskud. Et overtræk på en bankkonto kan man opfatte som et negativt indestående, eller en formindskelse af en størrelse kan opfattes som en negativ forøgelse.. Negative tal bruges til at beskrive tal på en skala som går længere ned end nul, som fx temperaturer på et Celciustermometer. Hvis man tæller hvor mange trin der er på en trappestige, kommer man måske til at der er syv trin. Det har ingen mening at sige at der er seks et halvt trin. Sådan er det ikke når man bruger tal til at angive afstande eller længder af planker. Her har man brug for tal—vi kalder dem brøker—som kan repræsentere længder mellem de hele tal.

En brøk er et tal som repræsenterer en del af en helhed, eller mere generelt et antal lige store dele. På almindelig dansk beskriver en brøk hvor mange dele af en bestemt størrelse der er, fx en-halv, tre-fjerdedele eller syv-ottenedele. Brøker skrives vha to hele tal, placeret henholdsvis over og under en såkaldt brøkstreg. Brøken

$$\tfrac{3}{4}$$

læser vi som tre-fjerdedele. Fire-tallet *nævner* hvor mange smådele helheden er delt i, og tre-tallet *tæller* hvor mange smådele der er.

Ægte eller uægte brøk

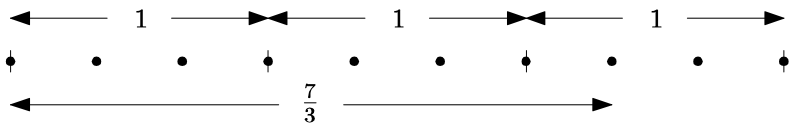
Hvis tælleren i en brøk er mindre end nævneren, som fx

$$\tfrac{3}{4},\ \tfrac{7}{8} \text{ eller } \tfrac{19}{20}$$

taler man om en *ægte* brøk. En ægte brøk er derfor et tal mellem 0 og 1. Hvis tælleren derimod er større end nævneren taler man om en *uægte* brøk. Brøken syv tredjedele, dvs

$$\tfrac{7}{3}$$

er en uægte brøk. Hvis en planke har længden $\frac{7}{3}$ meter, må du forestille dig meter-enheden delt i 3 stykker, hver på $\frac{1}{3}$ meter.



Det betyder at plankens længde også kan angives som 2 meter plus en rest på $\frac{1}{3}$ meter. Af figuren ses det også at der fx gælder

$$\tfrac{2}{3} + \tfrac{4}{3} = \tfrac{7}{3},$$

altså at to brøker med *samme nævner* adderes ved at addere tællerne og beholde nævneren.

Man benytter ofte omskrivningen

$$\tfrac{7}{3} = 2\tfrac{1}{3}$$

og siger at brøken er skrevet som et *blandet tal*, idet det består af et helt tal og en ægte brøk. Det er let at omskrive fra brøk til blandet tal og omvendt. Her er et par eksempler.

1. $8\frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{16}{2} + \frac{1}{2} = \frac{8 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{17}{2}$
2. $4\frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3 + 2}{3} = \frac{14}{3}$

Forlænge og forkorte brøker

Man *forlænger* en brøk ved at gange med det samme tal i tæller og nævner, og man *forkorter* en brøk ved at dividere med det samme tal i tæller og nævner.
Eksempler:

1. $\frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{3}{9}$. Her ganges med 3 i tæller og nævner.
2. $\frac{3}{8} = \frac{3 \cdot 4}{8 \cdot 4} = \frac{12}{32}$. Her ganges med 4 i tæller og nævner.
3. $\frac{18}{12} = \frac{18/6}{12/6} = \frac{3}{2}$
4. $\frac{15}{20} = \frac{15/5}{20/5} = \frac{3}{4}$

Addition og subtraktion

Man *adderer* eller *subtraherer* brøker ved først at sørge for at brøkerne har samme nævner. Derefter adderes eller subtraheres tællerne.
Eksempler:

1. For at udregne summen
$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4}$$
skal de to brøker forlænges, så de får samme nævner. Hvis den første brøk forlænges med 4 og den anden brøk med 3 får vi
$$\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 4} + \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{4}{12} + \frac{9}{12}.$$
Resultatet er derfor
$$\frac{13}{12}.$$
Bemærk at fællesnævneren kan findes ved at
   (a) forlænge den første brøk med den anden brøks nævner samt
   (b) forlænge den anden brøk med den første brøks nævner.
2. Summen
$$\frac{3}{5} + \frac{7}{8}$$
bestemmes ved først at forlænge brøkerne, så de får samme nævner. Da fællesnævneren er $5 \cdot 8 = 40$ sker omskrivningen på følgende måde:
$$\frac{3}{5} + \frac{7}{8} = \frac{3 \cdot 8}{5 \cdot 8} + \frac{7 \cdot 5}{8 \cdot 5} = \frac{24}{40} + \frac{35}{40} = \frac{59}{40}.$$
3. Differensen
$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3}$$
udregnes på tilsvarende måde:
$$\frac{4}{5} - \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{12}{15} - \frac{10}{15} = \frac{2}{15}$$
4. Man kan altid finde en fællesnævner ved at gange nævnerne med hinanden. Hvis det drejer sig om at udregne
$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5},$$
kan man bruge $8 \cdot 4 \cdot 5 = 160$ som fællesnævner. Men her kan man nøjes med fællesnævneren $8 \cdot 5 = 40$, da alle tre nævnere går op i dette tal.
$$\frac{7}{8} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{5 \cdot 7}{5 \cdot 8} - \frac{10 \cdot 3}{10 \cdot 4} - \frac{8 \cdot 2}{8 \cdot 5} = -\frac{11}{40}.$$

Multiplikation (gange)

Man *multiplicerer* en brøk med et (helt) tal ved at gange *brøkens tæller* med tallet (og bibeholde nævneren).
Eksempler:

1. $5 \cdot \frac{2}{7} = \frac{5 \cdot 2}{7} = \frac{10}{7}$
2. $2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2 \cdot 1}{3} = \frac{2}{3}$
3. $6 \cdot \frac{2}{3} = \frac{6 \cdot 2}{3} = \frac{12}{3} = 4$

Man multiplicerer en brøk med en brøk ved at gange *tæller med tæller* og *nævner med nævner*.
Eksempler:

1. $\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1 \cdot 2}{7 \cdot 3} = \frac{2}{21}$
2. $\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{3} = \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{10}{9}$
3. $\frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} = \frac{5 \cdot 6}{6 \cdot 7} = \frac{5}{7}$

Division (at dele)

Man *dividerer* en brøk med et (helt) tal ved at gange *brøkens nævner* med tallet (og bibeholde tælleren).
Eksempler:

1. $\frac{1}{3}/2 = \frac{\frac{1}{3}}{2} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$
2. $\frac{1}{5}/3 = \frac{\frac{1}{5}}{3} = \frac{1}{5 \cdot 3} = \frac{1}{15}$
3. $\frac{4}{3}/4 = \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{4}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3}$

Man dividerer en brøk med en brøk ved at gange den første brøk med den anden brøk "vendt om"—*man ganger med den omvendte*.
Eksempler:

1. $\frac{2}{3}/\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{1} = \frac{4}{3}$
2. $\frac{8}{5}/\frac{2}{3} = \frac{8}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{4 \cdot 3}{5 \cdot 1} = \frac{12}{5}$

Man dividerer et tal med en brøk ved at gange tallet med brøken "vendt om"—man *ganger man med den omvendte*.
Eksempler:

1. $2/\frac{2}{5} = 2 \cdot \frac{5}{2} = \frac{2 \cdot 5}{2} = \frac{10}{2} = 5$
2. $8/\frac{3}{8} = 8 \cdot \frac{8}{3} = \frac{8 \cdot 8}{3} = \frac{64}{3}$