Introduktion til differentialligninger

Hvad er en differentialligning?

En differentialligning er en ligning hvorom det gælder:

1. der indgår en afledet funktion – fx skrevet som $f'(x)$
2. man løser ligningen i forhold til $f(x)$ – altså er løsningen en funktion.

Når det er $f'(x)$ der indgår, er der tale om en differentialligning af første orden. Man kan have højere ordner af differentialligninger, dvs. en funktion differentieret flere gange, men de indgår ikke i forløbet her.

Vi er vant til at skrive den afledede funktion som $f'(x)$, men i differentialligninger skriver vi ofte y' eller $\frac{dy}{dx}$.

Følgende ligninger er eksempler på førsteordens differentialligninger:

$$(1)\ y' = 2x + 4$$

$$(2)\ y' = 4y$$

$$(3)\ \frac{dy}{dx} = 2x - 5y$$

Differentialregning omhandler ændringer og væksthastighed. Derfor beskriver differentialligninger sammenhæng mellem den hastighed hvormed en funktion ændrer sig, og funktionen selv. Det kan fx være at der er proportionalitet mellem væksthastighed og funktionen selv – i sådan et tilfælde bliver differentialligningen

$$(4)\ y' = k \cdot y$$

Hastigheden hvormed højden af vandet i en bestemt beholder ændres når man åbner en hane i bunden af beholderen, kan fx beskrives ved følgende differentialligning (vandhøjden her betegnet h):

$$(5)\ \frac{dh}{dt} = -0{,}4 \cdot \sqrt{h}.$$

At højdeændringen dermed er negativ, skyldes vandhøjden i beholderen falder.

Løsning af differentialligninger

Der er to måder at løse differentialligninger på:

1. ved at løse dem vha. CAS-værktøj
2. ved først at identificere typen af differentialregning og dernæst at anvende løsningsformel (modul 5 bringer dig igennem dette)

En løsning til en differentialligning er et funktionsudtryk som opfylder differentialligningen. Dvs. at differentialligningen skal ende med 0 = 0 når man sætter funktionsudtrykket ind i ligningen. Desuden er det nødvendigt at angive definitionsmængden for løsningsfunktionen.

Er det den korrekte løsning?

Vi havde ovenfor differentialligningen

$$(5)\ \frac{dh}{dt} = -0{,}4 \cdot \sqrt{h}.$$

Vi får oplyst at ved start (dvs. $t = 0$) er vandhøjden i beholderen 25 cm. Ved hjælp af CAS og beregning findes løsningsfunktionen

$$h(t) = (5 - 0{,}2t)^2 \ \text{ for } 0 \leq t \leq 25$$

Vi skal herefter bestemme $h'(t)$. Ved hjælp af CAS får vi:

$$h'(t) = 0{,}08(t - 25).$$

Vi sætter nu de to udtryk ind i differentialligningen (5) og får:

$$0{,}08(t - 25) = -0{,}4 \cdot \sqrt{(5 - 0{,}2t)^2} \iff \quad [\textit{fordi det gælder at } 0 \leq t \leq 25]$$

$$0{,}08t - 2 = -0{,}4(5 - 0{,}2t) \iff$$

$$0{,}08t - 2 = -2 + 0{,}08t \iff$$

$$0 = 0$$

Vi ser dermed at ligningen stemmer med de to udtryk indsat. Derfor har vi vist at funktionen $h(t) = (5 - 0{,}2t)^2$ er løsning til differentialligningen $\frac{dh}{dt} = -0{,}4 \cdot \sqrt{h}$.

Tidligere kendt differentialligning

I integralregning kan vi fx løse $\int (3x^2 - 4x + 5)dx$. At løse dette ubestemte integral svarer til at løse differentialligningen $y' = 3x^2 - 4x + 5$. Vi får derfor at løsningen er

$$y = x^3 - 2x^2 + 5x + k$$

Differentialligninger i modul 5

På matematik A-niveau ser vi på en række differentialligninger. Side 253 i A-bogen finder du en oversigt over visse typer differentialligninger – og deres løsninger. Bogens kapitel 9 og 10 side 203-235 fremlægger hvordan man opstiller differentialligninger. I bogens kapitel 11 side 236-254 ser vi på hvordan man løser differentialligninger uden CAS-værktøj. Det er især meget relevant til den mundtlige eksamen.

Til den skriftlige eksamen er det vigtigt at lære at håndtere CAS-værktøjet til løsning af differentialligninger. Det skal du arbejde med i modulopgaverne. Du kan læse mere om CAS-værktøj og differentialligninger i Fronter under modul 5.