Eksempel på integration ved substitution

Integration ved substitution er en metode til at løse vanskelige integraler uden brug af CAS-værktøj. Metoden kræver at der i integralet optræder en faktor der differentieret giver en anden faktor.

$$\int_0^2 \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}dx$$

Vi bemærker som det første at nævneren differentieret giver tælleren:

$(x^3+x+2)' = 3x^2+1$

Derfor vælger vi at sætte nævneren lig med t, altså: $t = x^3+x+2$

Vi differentierer nu t i forhold til x. Derfor kalder vi $t' = \frac{dt}{dx}$

$\frac{dt}{dx} = 3x^2+1$

Vi ønsker at erstatte dele af vores integral så det bliver lettere. Det er det metoden går ud på. Derfor ønsker vi at erstatte dx med noget vi kan få frem fra udtrykket $\frac{dt}{dx} = 3x^2+1$ hvor vi betragter symbolet $\frac{dt}{dx}$ som en brøk. Ved omformning får vi:

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2+1 \Leftrightarrow dt = (3x^2+1)\cdot dx \Leftrightarrow dx = \frac{dt}{3x^2+1}$$

Vi skal nu erstatte, dvs. substituere. Vi erstatter t, og vi erstatter dx:

$\int \frac{3x^2+1}{x^3+x+2}dx = \int \frac{3x^2+1}{t}\frac{dt}{3x^2+1} = \int \frac{1}{t}dt$

fordi $\frac{3x^2+1}{3x^2+1} = 1$.

Vi mangler nu at justere grænserne. De skal justeres fra at være knyttet til x til at være knyttet til t.

Derfor udregner vi: $x = 2: t = 2^3+2+2 \Leftrightarrow t = 12$

$x = 0: t = 0^3+0+2 \Leftrightarrow t = 2$

Dermed er får vi det nye integral i forhold til t: $\int_2^{12}\frac{1}{t}dt$. Vi løser dette integral:

$$\int_2^{12}\frac{1}{t}dt = [\ln(t)]_2^{12} = \ln(12) - \ln(2) = \ln\left(\frac{12}{2}\right) = \mathbf{ln(6)}$$