Bevis: Rødder i andengradspolynomiet

I bogen side 66 står en sætning om rødder i et andengradspolynomium. Når man finder rødder i et andengradspolynomium, svarer det til at løse en ligning af formen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hvis $a \neq 0$ er der tale om en *andengradsligning*. Vi skal her gennemgå et bevis for sætningen s. 66. Beviset er en anden udgave af beviset side 251-252 i bogen.

Man kan formulere sætningen som:

Sætning

Vi ser på ligningen

$$ax^2 + bx + c = 0\text{, hvor } a \neq 0$$

Vi definerer *diskriminanten*, *d*, ved

$$d = b^2 - 4ac$$

Så gælder:

- Hvis $d < 0$ har ligningen ingen løsninger
- Hvis $d = 0$ har ligningen én løsning: $x = \frac{-b}{2a}$
- Hvis $d > 0$ har ligningen to løsninger: $x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$

Beviset benytter en del omskrivninger, hvor det er en god idé at se på *kvadratsætningerne* side 20 øverst. Løs gerne opgave 13 side 280 i bogen.

Bevis

Først omskriver vi ligningen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow$$

Vi ganger med $4a$ på begge sider (husk $a \neq 0$, så det er tilladt)

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 \Leftrightarrow$$

Vi lægger b^2 til på begge sider

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 \Leftrightarrow$$

Vi trækker $4ac$ fra på begge sider

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac \Leftrightarrow$$

Vi benytter definitionen: $d = b^2 - 4ac$

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d \Leftrightarrow$$

Vi omskriver for bedre at kunne se brugen af kvadratsætningen.

$$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 = d \Leftrightarrow$$

Vha. kvadratsætningen omskrives så til…

$$(2ax + b)^2 = d$$

De tre tilfælde:

Nu kan vi inddele i tre tilfælde:

- **Hvis $\boldsymbol{d} < 0$** har ligningen ingen løsninger, fordi venstresiden $(2ax + b)^2$ ikke kan blive negativ.
- **Hvis $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{0}$**, har vi ligningen $(2ax + b)^2 = 0$, hvilket svarer til: $2ax + b = 0$. Da er $x = \frac{-b}{2a}$.
- **Hvis $\boldsymbol{d} > 0$:**

  Vi ved at der gælder følgende: $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \sqrt{9}$ eller $x = -\sqrt{9}$ $\Leftrightarrow$ $x = 3$ eller $x = -3$.

  På tilsvarende måde kan vores ligning

  $$(2ax + b)^2 = d$$

  omskrives til

  $$2ax + b = \sqrt{d} \text{ eller } 2ax + b = -\sqrt{d}$$

  Det skriver man også således:

  $$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

  Isoleres x fås:

  $$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

  Hermed er sætningen bevist.