Thomas Jensen & Morten Overgård Nielsen

Den logistiske differentialligning

Vi betragter den logistiske differentialligning

$$y' = a(M - y)y \qquad \text{hvor } a \text{ og } M \text{ er positive tal.}$$

I A-bogen side 245 præsenteres samtlige løsninger til denne differentialligning.

Vi vil her spørge: ***For hvilket y er væksthastigheden størst?*** Da væksthastigheden er givet ved y', kan vi spørge på en anden måde: ***For hvilket y er $a(M - y)y$ størst mulig?***

I udtrykket $a(M - y)y$ er a og M positive tal. Vi kan betragte $a(M - y)y$ som en funktion af y dvs. $f(y) = a(M - y)y$. Det kan også skrives $f(y) = a(M - y)y = aMy - ay^2$.

Tegner man grafen for $f(y)$, får man en parabel hvor grenene vender nedad da koefficienten til y^2 er negativ. Vi kan vise at funktionen har rødderne *0* og *M* idet

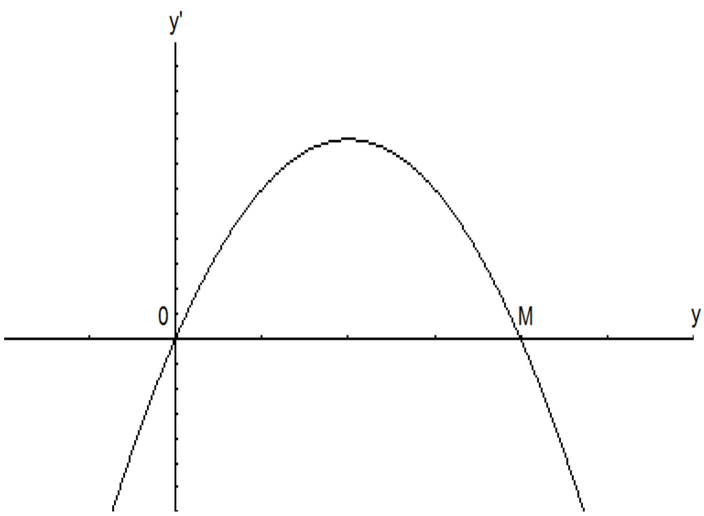
$$f(y) = 0 \Leftrightarrow$$

$$a(M - y)y = 0 \Leftrightarrow \text{ [nulreglen anvendes]}$$

$$M - y = 0 \ \vee y = 0 \Leftrightarrow$$

$$y = M \vee y = 0$$

Funktionen har dermed nulpunkter M og 0, og grafen er en parabel hvor vender grenene nedad. Da er toppunktet for *f* placeret midt mellem *0* og *M* dvs. i $\frac{M}{2}$. Der gælder altså sætningen:



SÆTNING
I den logistiske differentialligning $y' = a(M - y)y$, hvor a og M er positive tal, er væksthastigheden størst for $y = \frac{M}{2}$.

Eksempel

Vi betragter differentialligningen

$$\frac{dV}{dt} = 0{,}000193V(139{,}6 - V).$$

Vi ser at $M = 139{,}6$.

Ifølge ovenstående sætning er væksthastigheden størst når $V = \frac{139{,}6}{2} = 69{,}8$. Hvis grafen for V går gennem punktet (0;7,3), fås ifølge løsningsformlen s. 245 i bogen:

$$V(t) = \frac{139{,}6}{1+c_1e^{-0{,}000193\cdot 139{,}6t}} = \frac{139{,}6}{1+c_1e^{-0{,}0269428t}}$$

hvor $V(0) = 7{,}3$ dvs.:

$$7{,}3 = \frac{139{,}6}{1+c_1} \Leftrightarrow c_1 = 18{,}1.$$

Da har vi:

$$V(t) = \frac{139{,}6}{1+18{,}1e^{-0{,}0269428t}}.$$

Det t hvor væksthastigheden er størst, er altså det t, hvor $V(t) = \frac{M}{2} = 69{,}8$. Løser man $69{,}8 = \frac{139{,}6}{1+18{,}1e^{-0{,}0269428t}}$, får man $t = 107{,}5$.

Graf for V