Beviser: Formlerne for udregning af konstanten a

Der indgår en konstant a i regneforskrifterne for den lineære funktion, den eksponentielle funktion og potensfunktionen. Her bevises de tre formler der bestemmer a ud fra to punkter på grafen. Alle tre beviser benytter sig af metoden **'to ligninger med to ubekendte'**, og de bygger på at man kan løse to ligninger med to ubekendte ved at trække de to ligninger fra hinanden eller ved at dividere dem med hinanden.

Lineære funktioner

Sætning

En lineær funktion er bestemt ved regneforskriften $f(x) = ax + b$. Grafen for funktionen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Hældningskoefficienten a kan da bestemmes ved $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ hvor $x_1 \neq x_2$.

Bevis

Vi indsætter de to koordinatsæt for punkterne i regneforskriften for den lineære funktion:

(x_2, y_2) indsat: $y_2 = ax_2 + b$

(x_1, y_1) indsat: $y_1 = ax_1 + b$

Vi har nu to ligninger med de to ubekendte a og b. Vi løser ligningerne med hensyn til a ved at trække de to ligninger fra hinanden (hvor $b - b = 0$):

$$
\begin{array}{rl}
 & y_2 = ax_2 + b \\
- & \\
 & y_1 = ax_1 + b \\
\hline
\end{array}
$$

$y_2 - y_1 = ax_2 - ax_1 \Leftrightarrow$ Vi sætter nu a uden for parentes

$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1) \Leftrightarrow$ Vi dividerer nu med $x_2 - x_1$ på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = a$$

Hermed har vi fået samme resultat som i sætningen, og sætningen er dermed bevist ☺

Eksponentielle funktioner

Sætning

En eksponentiel funktion er bestemt ved regneforskriften $f(x) = b \cdot a^x$. Grafen for funktionen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Fremskrivningsfaktoren a kan da bestemmes ved $a = \sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}}$ hvor $x_1 \neq x_2$.

Bevis

Vi indsætter de to koordinatsæt for punkterne i regneforskriften for den eksponentielle funktion:

(x_2, y_2) indsat: $y_2 = b \cdot a^{x_2}$

(x_1, y_1) indsat: $y_1 = b \cdot a^{x_1}$

Vi har nu to ligninger med de to ubekendte a og b. Vi løser ligningerne med hensyn til a ved at dividere de to ligninger med hinanden:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot a^{x_2}}{b \cdot a^{x_1}}$$

Vi anvender nu potensregnereglen $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ til følgende omskrivning (idet b-værdien forkortes væk):

$$\frac{y_2}{y_1} = a^{x_2 - x_1}$$

Vi tager den $(x_2 - x_1)$'te rod på hver side af lighedstegnet:

$$\sqrt[x_2 - x_1]{\frac{y_2}{y_1}} = a$$

Hermed har vi fået samme resultat som i sætningen, og sætningen er dermed bevist ☺

Potensfunktioner

Sætning

En potensfunktion er bestemt ved regneforskriften $f(x) = b \cdot x^a$. Grafen for funktionen går gennem punkterne (x_1, y_1) og (x_2, y_2).

Konstanten a kan da bestemmes ved $a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)}$ hvor $x_1 \neq x_2$.

Bevis

Vi indsætter de to koordinatsæt for punkterne i regneforskriften for potensfunktionen:

(x_2, y_2) indsat: $y_2 = b \cdot {x_2}^a$

(x_1, y_1) indsat: $y_1 = b \cdot {x_1}^a$

Vi har nu to ligninger med de to ubekendte a og b. Vi løser ligningerne med hensyn til a ved at dividere de to ligninger med hinanden:

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{b \cdot {x_2}^a}{b \cdot {x_1}^a}$$

Vi anvender nu potensregnereglen $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$ til følgende omskrivning (idet b-værdien forkortes væk):

$$\frac{y_2}{y_1} = \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a$$

Fordi den ubekendte a står som eksponent, tager vi logaritmen på hver side af lighedstegnet (vi anvender her den naturlige logaritme):

$\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^a \Leftrightarrow$ Vi anvender logaritmeregnereglen $\ln a^x = x \cdot \ln a$

$\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right) = \mathrm{a} \cdot \ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \Leftrightarrow$ Vi dividerer nu med $\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$ på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = a$$

Hermed har vi fået samme resultat som i sætningen, og sætningen er dermed bevist ☺

Det kan tilføjes at man ved hjælp af logaritmeregneregler får:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\log y_2 - \log y_1}{\log x_2 - \log x_1}$$