Mere om beviser...

Det følgende kan ses som en udbygning af bogens kapitel om beviser. Du kan her på hjemmesiden læse om:

- Flere direkte beviser
- Bevis ved "kontraposition"
- Flere indirekte beviser
- Eksistensbeviser
- Bevisernes død? - Mere om computerbeviser

Du kan også på hjemmesiden finde materiale om "Matematikken som ideal" og nogle opgaver vedrørende beviser.

Flere direkte beviser

Vi vil undersøge sætningen:

Hvis x er et ulige tal, så er x^2 et ulige tal

Bevis

Ved et ulige tal forstår vi et tal, x, der kan skrives på formen x = 2n + 1, hvor n er et helt tal. Et helt tal er enten lige eller ulige. Da fås:

Da x er ulige, findes et helt tal m, så x = 2m + 1. Da fås $x^2 = (2m + 1)^2 = 4m^2 + 4m + 1$ (Regn selv efter). Altså haves $x^2 = 4m^2 + 4m +1 = 2(2m^2 +2m) +1$. Da kan x^2 altså skrives på formen 2n + 1. Da er x^2 et ulige tal.

Bevis ved "kontraposition"

Under "Flere direkte beviser" så vi på sætningen: Hvis x er ulige, så er x^2 ulige. Denne sætning har strukturen: Udsagn p medfører Udsagn q. Det skriver man kort som:

$$p \Rightarrow q$$

Man kan vise, at det logisk set er det samme at bevise $p \Rightarrow q$, som at bevise $ikke\, q \Rightarrow ikke\, p$. At bevise at p medfører q, er altså det samme som at bevise at benægtelsen af q, medfører benægtelsen af p. At benytte denne metode til at bevise $p \Rightarrow q$ kaldes at føre bevis ved *kontraposition*.

Lad os undersøge sætningen:

Hvis x^2 er et lige tal, så er x et lige tal

Bevis
Hvis vi vil bevise ovenstående sætning ved *kontraposition*, skal vi bevise:

Hvis x er et ulige tal, så er x^2 et ulige tal

Men det er allerede bevist under "Flere direkte beviser! Det gælder altså, at hvis x^2 er et lige tal, så er x et lige tal.

Flere indirekte beviser

Ovenfor benyttede vi "bevis ved kontraposition" for at vise:

Hvis x^2 er et lige tal, så er x et lige tal

Men man kan også føre et indirekte bevis:
Lad os da antage at x^2 er et lige tal, *men x er et ulige tal.* Når x er et ulige tal, siger sætningen under "Flere direkte beviser", at da er x^2 ulige. Dette er i modstrid med hvad vi antog. Da må x være et lige tal.

Man kan altså godt have beviser af flere forskellige typer for samme matematiske sætning.

Eksistensbeviser

I matematik kan man også arbejde med *eksistensbeviser.* Man kan tænke sig, at man leder efter en bestemt løsning til at problem. Et eksistensbevis viser *at* der eksisterer en løsning, men ikke nødvendigvis *hvad* løsningen er. Det kan være et vigtigt skridt på vejen til løsningen.

Bevisernes død? - Mere om computerbeviser

Siden Firefarveproblemet blev løst vha. computere i 1976 har man diskuteret computerens svagheder og styrker. I forbindelse med beviser er der især 3 styrker:

- Computeren kan undersøge "cases" dvs. specialtilfælde
- Computeren kan behandle store regneopgaver
- Computeren kan også håndtere symbolske udtryk, formler mm. De kan sågar komme med matematiske hypoteser.

I tilfældet med firefarveproblemet var ideen i beviset, at reducere det helt generelle problem til et antal "cases", der kunne undersøges vha. computere. Gennemregning af disse cases var en uoverkommelig menneskelig opgave.

Kritikken
Hvad går kritikken af computerbeviser da på? For eksempel:

- Computerprogrammer kan rumme programmeringsfejl
- Beviser kan være utroligt komplicerede og uoverskuelige
- I en vis forstand er beviserne uæstetiske

I debatten om computerprogrammer findes både ”traditionalister” og ”fornyere”. Traditionalister forsvarer matematikken klassiske dyder, mens fornyerne argumenterer for computernes brugbarhed i beviserne. Fornyerne anfører at ganske vist kan programmerne rumme fejl, men det er ikke særegent for computerprogrammer. Det gælder også for ikke-computerbeviser. ”Beviser” i forbindelse med netop firefarveproblemet har eksempelvis flere gange været behæftet med fejl.

Matematikken udvikler sig også i retning af flere hundreder sider lange, komplicerede beviser, som kun få er i stand til at gennemskue. Så er uoverskueligheden af *computerbeviser* en god indvending? Endelig er den klassiske matematikers krav om enkelthed og elegance måske nok fornemme idealer, men kan de betegnes som afgørende?

Måske er det computerbevisets mest ubehagelige side, at det ikke er *overskueligt* i betydningen: muligt at arbejde sig igennem og få et overblik. Er en sætning bevist hvis ingen faktisk i praksis kan *læse* beviset?