Differentiation af sammensat funktion

Givet to funktioner f og g hvor g er differentiabel i punktet x og f er differentiabel i $g(x) = y$, ønsker vi at beregne den afledede af den sammensatte funktion $f(g(x))$ i punktet x. Med andre ord ønsker vi at beregne

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Svaret involverer den afledede af den *ydre* funktion f og den afledede af den *indre* funktion g. Der gælder

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(f(g(x))) = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x). \tag{1}$$

Resultatet kan også formuleres

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = f'(y) \cdot g'(x), \qquad \text{hvor} \qquad y = g(x). \tag{2}$$

► For at bevise sætningen skal notationen på plads. Vi antager at g er differentiabel i x. Det betyder at tallet $g'(x)$ eksisterer og at det er bestemt ved

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \to g'(x) \qquad \text{for} \qquad h \to 0. \tag{3}$$

Vi antager også at f er differentiabel i $y = g(x)$. Det betyder at tallet $f'(y)$ eksisterer og at det er bestemt ved

$$\frac{f(y+k) - f(y)}{k} \to f'(y) \qquad \text{for} \qquad k \to 0. \tag{4}$$

Sættes

$$k = g(x+h) - g(x) = g(x+h) - y$$

vil

$$k \to 0 \qquad \text{for} \qquad h \to 0$$

fordi g er differentiabel og dermed kontinuert. Vi bestemmer nu differenskvotienten for den sammensatte funktion, idet vi benytter at $g(x) = y$ og $g(x+h) = g(x) + k = y + k$.

$$\begin{aligned} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} &= \frac{f(y+k) - f(y)}{h} \\ &= \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{k}{h} \\ &= \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \end{aligned}$$

Vi lader nu $h \to 0$ hvorved også $k \to 0$. Det betyder at første faktor går mod $f'(y)$ og anden faktor mod $g'(x)$. Heraf følger sætningen. ■