Bevis for areal og bestemte integraler

Hjælp til s. 137 i bogen.

Sætning

Arealet mellem grafen for en positiv funktion f og x-aksen **samt** afgrænset af x-værdierne a og b udregnes ved

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

Beviset

Forklar hvad der er forskellen mellem arealet A og arealfunktionen $A(x)$.

Vi antager at F er stamfunktion til f. Vi kan derfor opskrive: $A(x) = F(x) + k$. Overvej og forklar hvorfor det gælder (tip: differentier).

- Vi indsætter nu $x = a$ i udtrykket $A(x) = F(x) + k$. Vis at det fører til at $k = -F(a)$. Hvad sker der med $A(a)$?
- Indsæt nu $k = -F(a)$ i $A(x) = F(x) + k$. Forklar at I derved får $A(x) = F(x) - F(a)$.
- Indsæt nu $x = b$ i $A(x) = F(x) - F(a)$. Forklar hvilket areal $A(b)$ beskriver.
- Vi har så at $A = F(b) - F(a)$.

Vi definerer nu at et bestemt integral skrives som: $F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$. Konstanten a kaldes for **den nedre grænse** mens konstanten b betegnes for **den øvre grænse**. Forklar hvorfor 'den nedre grænse' og 'den øvre grænse' er passende betegnelser.

Dermed kan vi omskrive til: $A = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$.

Hvad har I nu bevist?

Tilføjelse

Bemærk at der ikke optræder konstantled i det bestemte integral. Det kan vises ved følgende udregning:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x) + k]_a^b = (F(b) + k) - (F(a) + k) = F(b) + k - F(a) - k = F(b) - F(a)$$

Konstanten har således ingen betydning i de bestemte integraler.